# Решение тригонометрических уравнений

Основные типы уравнений и стандартные способы их решения

# Содержание

I. **Введение**

II. **Способы решения:**

1) Замена переменной
2) Решение однородных уравнений
3) Разложение на множители
4) Решение линейных уравнений
   а) введение вспомогательного угла
   б) сведение к однородному
5) Решение уравнений, содержащих высокие степени
6) Решение уравнений, с ограниченным ОДЗ
7) Универсальная тригонометрическая подстановка (дополнительно)

# I. Введение

перейти

К оглавлению

- При решении тригонометрических уравнений, стараются привести уравнения к уравнению, содержащему одну функцию одного аргумента.

- Способы решения уравнений различны, однако, можно выделить основные типы уравнений и стандартные способы их решений.

# II.Способы решения

перейти

К оглавлению

## 1 Замена переменной

**Пример:** $3\,tg^2 x + tgx - 2 = 0$

**Решение:**

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $arctg2/3+\pi n$; $n \in Z$

# II.Способы решения

2 **Решение однородных уравнений (теория)**

## Однородные уравнения относительно sin x и cos x:

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

Значения x при которых <u>cosx = 0</u>, не являются решениями уравнения, т.к. если cosx = 0, то sinx = 0, а sinx и cosx не могут быть равными нулю одновременно.

$\cos x \neq 0$ в однородных уравнениях

# II.Способы решения

перейти

2 **Решение однородных уравнений**

**Пример:** 3sinx + 2 cosx = 0 // разделим на cosx≠0 в однородном уравнении

**Решение:**

Ответ: arctg(-2/3) + πn, n Є Z

# II.Способы решения

перейти

3 **разложение на множители**

К оглавлению

**Пример:** sin2x = 2cos²x

**Решение:**

# II.Способы решения

## 4 Линейные уравнения относительно sinx и cosx (теория)

$$a\sin x + b\cos x = c \text{ , где } c \neq 0 \quad \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$$

## 4а Введение вспомогательного угла

**Поделив обе части на** $\sqrt{a^2 + b^2}$ **получим:**

$$\sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \varphi) = c, \quad \text{где} \quad \varphi = arctg\frac{b}{a}$$

$$\text{т. к.} \quad \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \;\; \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

# II.Способы решения

4 Линейные уравнения относительно sinx и cosx

4а Введение вспомогательного угла

**Пример:** $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

**Решение:**

4б

# II.Способы решения

перейти

4 Линейные уравнения относительно sinx и cosx

4б Сведение к однородному

**Пример:**

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

**Решение:**

# II.Способы решения

**5 Решение уравнений, содержащих выс. степени**

**Формулы понижения степени:**

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

$2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$

$\sin^4 x + \cos^4 x =$

$= \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x =$

$= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 0{,}5\sin^2 2x$

$\sin^6 x + \cos^6 x =$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$

$= \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 0{,}75 \cdot \sin^2 2x$

# II.Способы решения

перейти

К оглавлению

**5 Решение уравнений, содержащих выс. степени**

**Пример:** $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$

**Решение:**

**Ответ:** $\pm \pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z$

# II.Способы решения

перейти

К оглавлению

## 6 Решение уравнений с ограниченной ОДЗ

**Пример:** $$\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$$

**Решение:**

**Ответ:** 2πn

# II. Универсальная тригонометрическая подстановка

Этот способ решения применяют лишь в том случае, когда не видно других путей решения.

$$\text{Если } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \text{ то } \sin x = \frac{2t}{t^2+1}; \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} =$$

Полученное выражение поделим и умножим на $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ (т.е. умножим на 1)

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} : \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 2tg\frac{x}{2} : (1 + tg^2\alpha) = \frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

# II. Универсальная тригонометрическая подстановка (продолжение)

Если $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, то $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$

Полученное выражение поделим и умножим на $\cos^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$

$$\cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2} = \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)cos^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} : \frac{1}{cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \left(1 - tg\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + tg\frac{\alpha}{2}\right) : \left(1 + tg^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\left(1 - tg\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + tg\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$