

Решение тригонометрических уравнений

Основные типы уравнений и стандартные способы их решения

Содержание

I. Введение

II. Способы решения:

- 1) Замена переменной
- 2) Решение однородных уравнений
- 3) Разложение на множители
- 4) Решение линейных уравнений
 - а) введение вспомогательного угла
 - б) сведение к однородному
- 5) Решение уравнений, содержащих высокие степени
- 6) Решение уравнений, с ограниченным ОДЗ
- 7) Универсальная тригонометрическая подстановка (дополнительно)

I. Введение

перейти

[К оглавлению](#)



- При решении тригонометрических уравнений, стараются привести уравнения к уравнению, содержащему одну функцию одного аргумента.

- Способы решения уравнений различны, однако, можно выделить основные типы уравнений и стандартные способы их решений.

II. Способы решения

перейти

1

Замена переменной

[К оглавлению](#)



Пример: $3 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$

Решение:



Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} 2/3 + \pi n; n \in \mathbb{Z}$

II. Способы решения

2 Решение однородных уравнений (теория)

Однородные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

Значения x при которых $\cos x = 0$, не являются решениями уравнения, т.к. если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$, а $\sin x$ и $\cos x$ не могут быть равными нулю одновременно.

$$\cos x \neq 0 \text{ в однородных уравнениях}$$

II. Способы решения

перейти



2 Решение однородных уравнений

Пример: $3\sin x + 2\cos x = 0$ // разделим на $\cos x \neq 0$ в однородном уравнении

Решение:

Ответ: $\arctg(-2/3) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

II. Способы решения

перейти

3

разложение на множители

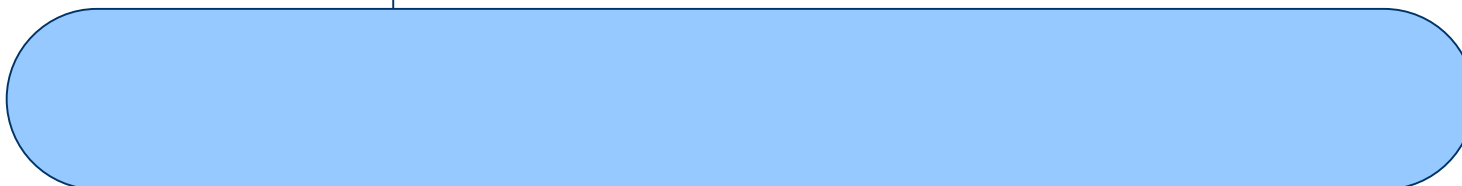
[К оглавлению](#)



Пример:

$$\sin 2x = 2\cos^2 x$$

Решение:



II. Способы решения

4 Линейные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$ (теория)

$$a \sin x + b \cos x = c, \text{ где } c \neq 0 \quad \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$$

4а Введение вспомогательного угла

Поделив обе части на $\sqrt{a^2 + b^2}$ получим:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) = c, \text{ где } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

$$\text{т.к. } \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

II. Способы решения

4 Линейные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$

4а Введение вспомогательного угла

Пример: $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$

Решение



II. Способы решения

перейти

4 Линейные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$

46 Сведение к однородному



Пример:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

Решение:

II. Способы решения

5 Решение уравнений, содержащих выс. степени

Формулы понижения степени:

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x =$$

$$= \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 0,5 \sin^2 2x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 0,75 \cdot \sin^2 2x$$

II. Способы решения

перейти

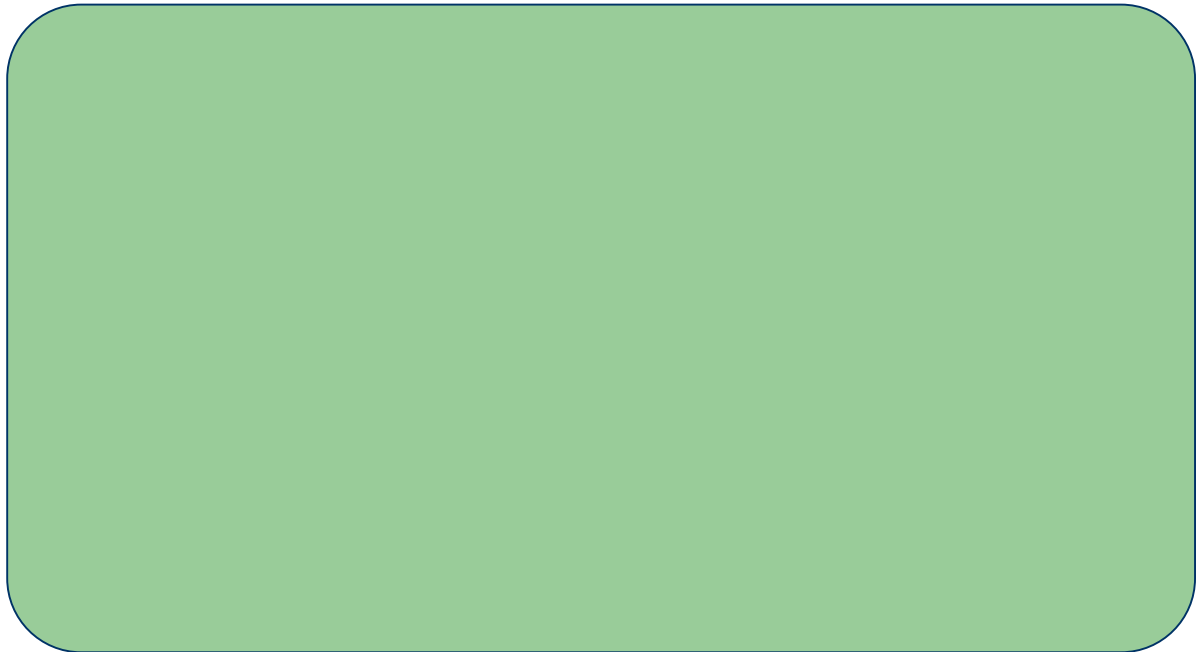
5 Решение уравнений, содержащих выс. степени

[К оглавлению](#)



Пример: $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$

Решение:



Ответ: $\pm \pi/4 + \pi n/2, n \in \mathbb{Z}$

II. Способы решения

перейти

6 Решение уравнений с ограниченной ОДЗ

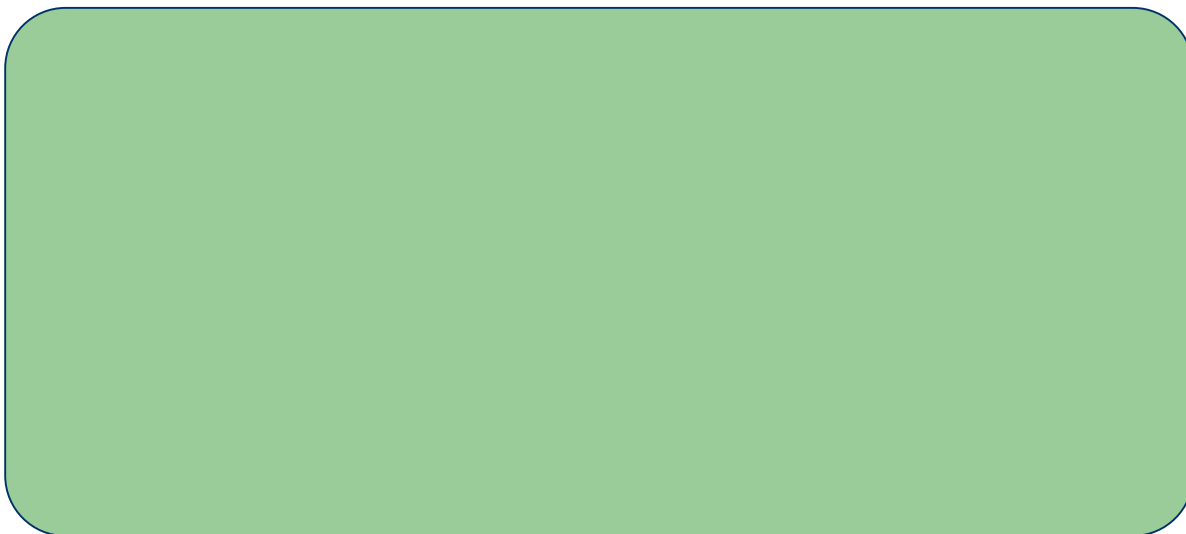
[К оглавлению](#)



Пример:

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$$

Решение:



Ответ: $2\pi n$

II. Универсальная тригонометрическая подстановка

Этот способ решения применяют лишь в том случае, когда не видно других путей решения.

$$\text{Если } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \text{ то } \sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}; \cos x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} =$$

Полученное выражение поделим и умножим на $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$ (т.е. умножим на 1)

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} &= 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} : \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} : (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1} \end{aligned}$$



II. Универсальная тригонометрическая подстановка (продолжение)

Если $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, то $\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}$; $\cos x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$

Полученное выражение поделим и умножим на $\cos^2 \frac{\alpha}{2} \neq 0$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) : \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$$

